

中学校数学科における二元一次方程式の 関数的見方に関する一考察

—全国学力・学習状況調査の追調査をてがかりに—

榎 本 哲 士¹

1. 問題意識と研究の目的

方程式は、変数（未知数）を含んだ相等関係についての条件を表した等式であり、条件を満たす値を的確に求めるために必要である（文部科学省，2008，p.62）。このような特徴をもつ方程式は、数学に限らず日常における様々な問題を解決する有効な道具として役割を果たす（三輪，1991）。そのため、方程式とその解の意味を理解することや方程式を解く方法を身に付けることは、数学学習の目標の一つに位置づいている。

平成19年度から実施されている全国学力・学習状況調査においては、方程式とその解の意味を理解することや方程式を解くことに関する問題が出題されている。これら方程式に関する調査の結果から、方程式を代数的に解く方法に関する問題の正答率が高いのに対して、二元一次方程式の解の意味理解に関する問題の正答率は低いことが明らかになった。さらに、二元一次方程式の解に対する生徒の実態も明らかになった。それは、「二元一次方程式のグラフを直線ではなく、座標平面上の格子点のみの離散的なグラフ」と捉える生徒の実態である。

このような生徒の実態は、代数的表現である方程式から関数的表現であるグラフへ表現を変換する活動において顕在化し、二つの数学的表現の間

¹ 白鷗大学教育学部

e-mail : senomoto@fc.hakuoh.ac.jp

で生起している。このことから、全国学力・学習状況調査のように、調査される数学的内容について複数の領域からアプローチする調査方法を取ることによって、生徒の実態が顕在化したと考えられる。

岩田（2012）は、授業を構想する上で、児童・生徒の思考や理解の状態を把握する必要があるとし、児童・生徒の状態を把握するために全国学力・学習状況調査の結果を用いることの可能性とその課題について述べている。岩田（2012）の指摘する全国学力・学習状況調査の課題とは、出題形式により解答類型数が制限され、生徒の状態を十分に分析するに至っていない点である。この課題を踏まえ、岩田（2012）は多様な解答類型による生徒の思考の把握及び、全国学力・学習状況の追調査の必要性を主張した。岩田(2012)による追調査の必要性の指摘と同様に、清水(2012)も、「教育課程実施状況調査を補完する形で実施された「特定の課題に関する調査」のように、全国学力調査で顕在化された生徒の実態をさらに精密に調べるための調査が望まれる」（清水，2012，p.33）と述べる。このように、ある数学的内容に対して生徒がどのように理解しているのかを調査するために複数の領域から問題を設定するという全国学力・学習状況調査の調査方法の特徴は、手続きに対する生徒の理解だけでなく、数学的内容に対する生徒の意味理解の実態を浮き彫りにした。この点で全国学力・学習状況調査は一定の成果を上げている。しかし、その出題形式が択一式に、また解答を分析する際の解答類型数が制限されている点に課題がある。それは、出題形式と解答類型数が制限されることによって、全国学力・学習状況調査の結果から困難を示す生徒の存在は特定できたとしても、その生徒の思考の特徴や理解の状態を把握することは困難であるからである。問題を解決する生徒の思考や、ある数学的内容に対する生徒の理解の状態を把握することは、学習指導を構想する上で欠かせない。このようなことから、全国学力・学習状況調査によって明らかになった、「二元一次方程式のグラフを直線ではなく、座標平面上の格子点のみの離散的なグラフ」と捉える生徒を特定し、その実態を分析する必要があると筆者は考えた。

以上より、本稿の目的は、二元一次方程式のグラフを座標平面の格子点上のみの離散的なグラフと捉える生徒を特定し、その思考の様相について考察することである。上記の目的を達成するために、Ⅱでは二元一次方程式と一次関数の概念間の関係について記述し、追調査を設計するための仮説を生成する。ⅢではⅡにおいて生成した仮説に基づいて作成した調査問題の実施概要とその結果を示す。ⅣではⅢにおいて示した調査問題とその結果の分析を行い、Ⅴにおいて先行研究との議論を行う。

Ⅱ．二元一次方程式に関する生徒の実態と調査設計の視点

1．全国学力・学習状況調査にみる生徒の実態

平成20年度全国学力・学習状況調査及び、平成21年度全国学力・学習状況調査では、二元一次方程式の解の意味に関する調査問題が出題されている。平成20年度調査では、二元一次方程式の解の個数に関する問題が出題された。この問題の正答率は59.1%であった。この結果から、約6割の生徒は二元一次方程式の解が無数にあると理解していることが読み取れる。

一方、平成21年度調査では二元一次方程式のグラフを選択する問題が出題された。この問題において、正解である直線のグラフを選んでいる生徒の割合は36.7%であったが、座標平面上の格子点のみの離散的なグラフを選んだ生徒の割合は41.9%であった。このことから、正答よりも誤答の反応率の方が高く、二元一次方程式の解を座標とする点の全体を表わしたグラフとして格子点上のみの離散的なグラフを選ぶ生徒が多く存在することが分かる。

上述した全国学力・学習状況調査の問題は、二元一次方程式の解の意味を調査対象とし、平成20年度調査では「数と式」領域から、平成21年度調査では「関数」領域から出題されている。つまり、二元一次方程式の解が持つ代数的表現と関数的表現、それぞれに焦点が当てられ調査が行われている。

これら二つの調査問題の結果を比較すると、代数的表現を用いて二元一

次方程式の解について思考する際には、その解が無数にあると認められるが、関数的表現を用いて二元一次方程式の解を表し、グラフで表現する際には離散的なグラフであると捉えてしまう生徒の実態を予想することができる。

2. 二元一次方程式と一次関数の関係

上記のような生徒の実態は、二元一次方程式の解に対する代数的表現と関数的表現の比較から特定された。そのため、二元一次方程式と一次関数の概念間の関係について分析する必要があるだろう。

中学校数学科における方程式に関する学習指導の内容は、一元一次方程式、二元一次方程式、連立二元一次方程式、二次方程式があり、これらは系統づけて学習指導される。方程式に関する学習指導の中でも、特に中学校第2学年の二元一次方程式に関する学習指導では、方程式と関数との関係が取り扱われることになっている（文部科学省，2008）。

このような学習指導の内容が意図されているのは、二元一次方程式 $ax+by+c=0$ （ a,b,c は定数）が方程式とも関数式とも解釈可能だからである。例えば、等式 $2x+y=3$ は、相等関係を表す方程式とみることも、関数関係を表す等式とみることもできるのである。同じ等式 $2x+y=3$ を方程式、関数式のいずれとみるかについて、菊池（1969）は、等式の中の文字の意味の相違と基礎とする集合に違いを指摘し、以下のように説明している。

ふたつの数の対の集合： $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ を基礎として、その中から等式 $2x+y=3$ を成り立たせる $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分集合 $L = \{(x, y) \mid 2x+y=3, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ を選び出すことができる。このような部分集合 L の選択条件として等式 $2x+y=3$ を見るときに、この等式は方程式と呼ばれるものであり、上記した部分集合 L が方程式の解集合となる。一方、 x のある値に対応する y の値を定める規則として等式 $2x+y=3$ をみるとき、この等式は関数関係を表す式となる。このように考えると、関数式として等式をみる場合には、等式の中の文字 x, y は変数となっている（菊池，

1964, p.183)。

上述のような等式に対する二通りの見方から、二元一次方程式の解を求める方法も二通り存在する。第一の見方による二元一次方程式の解法とは、二元一次方程式 $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) を満たす x, y の値の組を求める方法である。対して、第二の見方による二元一次方程式の解法とは、二元一次方程式 $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) を一次関数を表す式として見直し、その式が表す関数関係をグラフに表現することで二元一次方程式の解を求める方法である。この方法は、等式の性質に基づいて形式的に式を変形して解を求める方法に対して、関数関係をグラフに表すことによって図的に解を求めていることになり、方程式と関数とを統一的な立場で考えるための基礎となるのである (能田, 1978)。

3. 教科書における二元一次方程式のグラフの扱い

二元一次方程式と一次関数の関係について、教科書ではどのような記載がされているのであろうか。まず教科書においては、二元一次方程式のグラフは二元一次方程式とその解の意味や連立方程式の解法について学習指導した後に、一次関数の単元の中で取り扱われる。その際に、二元一次方程式を y について解き、一次関数の式の形 $y=ax+b$ になることや、「 x の値を決めたら、 y の値がただ一つに決まる」という関数の定義を基にして二元一次方程式を一次関数を表す式へ見直すのである。二元一次方程式のグラフに関する学習指導では、一次関数のグラフが直線であるということを前提におき、二元一次方程式が式の形式を変形することで一次関数と見ることができることから、二元一次方程式のグラフが直線になるということを確認するのである (藤井・俣野ほか, 2012; 澤田・坂井ほか, 2012)。

その際に、二元一次方程式の中の文字に整数、有理数を代入することはあるが、実数の範囲で数を代入することを行われない。そのため、中学校第二学年において二元一次方程式のグラフが直線になるということの最たる根拠は、二元一次方程式は式の変形を行うことにより、相等関係の方程

式を一次関数の式へ見直すことができるということなのである。

上述のようなことから、二元一次方程式の形式が陽関数表記か、あるいは陰関数表記かによって、生徒のグラフの捉え方が変わるのではないかという仮説が生まれた。それは全国学力・学習状況調査の結果において、二元一次方程式が陰関数表記で与えられた場合に、36%の生徒が離散的なグラフであると捉えたからである。一次関数の学習指導において、一次関数のグラフは直線であると学習し、その既習を前提に二元一次方程式のグラフは直線であることを学習するのであるから、式の形式によって対応するグラフが変化すると捉えているのではないかという仮説が生じたのである。

4. 調査設計の視点

Ⅱ. 1 において全国学力・学習状況調査の結果を考察することによって、二元一次方程式とその解の意味に関する生徒の理解の現状を把握することができ、生徒の実態を予想することができた。

しかし、Ⅰにおいて指摘したように、調査問題の出題方法及び、解答類型数に制約があり、本稿で取り上げている生徒の実態がどのような学習を原因として生起するのか、二元一次方程式のグラフを離散的なグラフとして捉える生徒がどのような根拠から解答しているのかという点に関する詳細な事実は明らかにできていない。そのため、筆者は、二元一次方程式のグラフを離散的なグラフと捉えてしまう生徒の思考を浮き彫りにすることを目的とした質問紙調査を設計し、全国学力・学習状況調査の結果より明らかになった生徒の実態に関する追調査を実施する必要があると考えた。

上記Ⅱ. 2 及び 3 において述べたように、二元一次方程式はその式の見方によって、相等関係を表す方程式とも一次関数の式とも解釈可能である。そのため、中学校第 2 学年では二元一次方程式を一次関数を表す式として見直し、二元一次方程式のグラフが一次関数のグラフと重なることを確認し、二元一次方程式の解が座標平面上で直線として表されることを確認する。このように二元一次方程式のグラフと一次関数のグラフが重な

り、そのグラフが直線であることを確認する際には、二元一次方程式を y について解くことが行われ、陽関数表記で表された二元一次方程式は一次関数として見るができるということを根拠としている。つまり、二元一次方程式のグラフが直線になることの確認のために一次関数のグラフの特徴が利用され、二元一次方程式を一次関数として見直す際には一次関数の式の形式 ($y=ax+b$) に変形可能か否かが判断の根拠となっているのである。

以上から、二元一次方程式のグラフが直線であることの根拠は、二元一次方程式を y について解き、その式を一次関数として見直すことであった。この式を変形するという行為と、式変形前後とグラフの対応を視点として、調査問題を設計する必要がある。

Ⅲ．実態調査の概要

1．実態調査の目的とその方法

実態調査の目的は、全国学力・学習状況調査の結果より明らかになった「二元一次方程式のグラフを離散的なグラフ」と捉える生徒を特定し、その実態を分析することである。この目的のために上記Ⅱ．4で示した調査設計の視点をもとに調査問題を作成し、その記述を分析することを通して生徒の実態の解明を行う。

実態調査は質問紙法を用いて実施し、質問紙は調査問題1（図1）と調査問題2（図2）の2枚を用意した。そして、調査問題1を先に実施し回収した後、調査問題2を行う形式で行った。調査問題1を解く際には、生徒の消しゴムの使用を禁止し、一度記述したことが残るように実施した。

2．実施時期および調査対象

調査は、平成22年9月に実施した。調査対象は、東京都内の公立中学校第3学年5クラス、154名である。

3. 調査問題とその意図

調査問題は2題作成した。そして、作成した2題の調査問題を調査問題1と調査問題2に分けて設定した。以下でその内容を示す。

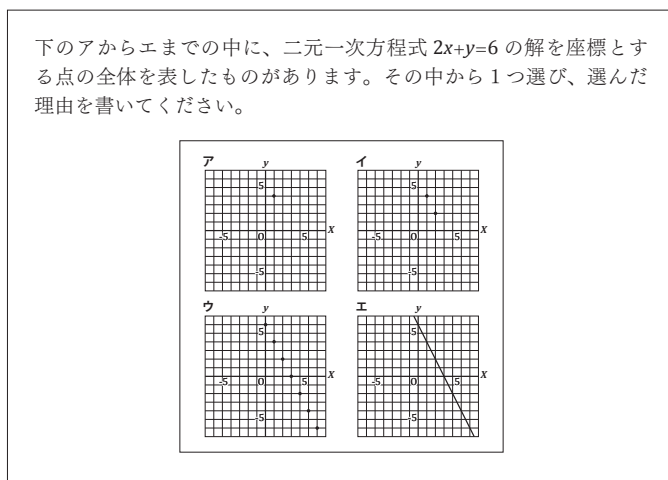


図 1：調査問題 1

図 1 に示した調査問題 1 は、平成21年度全国学力・学習状況調査のA12の問題を用い、生徒に選択した理由を記述させる問題である。調査問題 1 の趣旨は、調査対象の生徒がどのような根拠に基づいてアからエの4つの選択肢を選んでいるのか、またその選択の傾向がどのような割合になっているのかを調べることである。

この問題を実施することにより、生徒の選択とその根拠を対応付けて観察することが可能となる。さらには、調査対象の中に選択肢ウを選ぶ生徒がどの程度いるのかを特定することができ、その根拠も明らかになる。

筆者は、二元一次方程式と一次関数に関する概念間の関係に関する分析を行う中で、Ⅱ. 3 で述べたような研究仮説を見出した。それは、二元一次方程式の形式によって対応するグラフが変化すると生徒は認識している

のではないかというものである。この仮説に基づき、調査問題2を図2のように作成した。

図2に示した調査問題2は、II.4において示した調査設計の視点である「二元一次方程式を y について解き、一次関数と見直す場面」に焦点を当てて作成した。そのため、二元一次方程式を陽関数表記で表した式と、陰関数表記で表した式を示し、それぞれの形式の式に対応するグラフが異なると考えるAくんを登場させた。そして、Aくんの考えに対する生徒の考えとその根拠を問うた。このような調査問題2に対する生徒による正誤の判断とその根拠から、グラフに表す対象である式の形式の違いがグラフの概形へ与える影響を明らかにできると考えた。

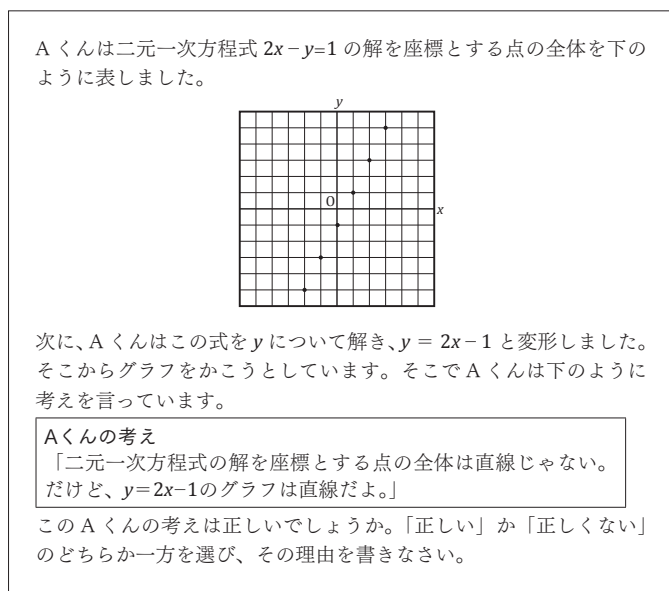


図2：調査問題2

調査問題2は、二元一次方程式のグラフを選択し、その根拠の記述を要求する調査問題1との比較も意図している。それは、調査問題1と調査問

題2の解答の整合を見るためである。調査問題1ではウを選び、調査問題2においてAくんの考えを「正しい」とし2つの調査問題に対して整合的な解答する生徒及び、調査問題1ではエを選び、調査問題2においてはAくんの考えを「正しい」と解答する生徒のように調査問題1と2において解答が変化する非整合的な生徒も特定できると考えたからである。

また、調査問題2はAくんという第三者を登場させ、その生徒の考えとして格子点のみのグラフと一次関数のグラフの違いを提示した。そして、第三者の考えに対してあなたはどうか考えるかということを問うている。この調査問題の形式は、藤井（1992）及び清水（1995）、清水（1998）で用いられている方法であり、生徒の思考を顕在化する方法として評価されている。

4. 実態調査の結果

調査問題1の結果を表1に示す。

表1：調査問題1の反応率

ア	イ	ウ	エ	無解答	計
4人 (2.6%)	12人 (7.8%)	40人 (26.0%)	96人 (62.3%)	2人 (1.3%)	154人

調査問題1の正答率は62.3%であった。このことから調査対象である生徒の約6割は、二元一次方程式のグラフを直線として捉え、正確に選択肢を選択できていることが分かる。一方、選択肢エではない他の3つの選択肢（ア、イ、ウ）を選択した生徒の割合は合わせて約4割であった。その内訳は表1の通りである。

表1より、選択肢ウを選ぶ生徒の割合は26.0%であった。この反応率は、平成21年度全国学力調査の結果に比べて高いものではないが、本稿における調査対象者の中にも選択肢ウを選択する生徒が存在することを示している。つまり、本稿の目的に記載した生徒の実態と同様の解答をする生徒が特定されたのである。

次に、調査対象者は、調査問題 1 に対してどのような根拠に基づいて選択肢の選択をしているのだろうか。以下、表 2 に調査問題 1 に対する根拠の解答類型を示す。

表 2 のように、生徒の選択の根拠を分類し整理した。解答類型①及び②に分類された生徒は、一次関数の変化の割合が一定であることや、それを座標平面上に表した時に「 x 軸方向に 1 進むと y 軸方向に 2 進む」と述べ、それを根拠に説明している。

解答類型③及び④に分類されている生徒は、点と直線の関係を根拠としている。また、解答類型⑤に分類される生徒は、方程式の中の文字に数値を代入し、その結果を根拠に説明をしている。解答類型⑥に分類される生徒は、「直線を引かなければならない」という信念から解答していることが明らかになった。

表 2：調査問題 1 に対する根拠の解答類型

解答類型		番号	反応率
一次関数の性質を根拠とする解答	傾きと切片に関する記述	①	45人 (29.2%)
	グラフのかき方に関する記述	②	10人 (6.5%)
点と直線の関係を根拠とする解答	点の集合は直線であるという記述	③	35人 (22.7%)
	点の集合は直線ではないという記述	④	5人 (3.2%)
方程式の中の文字に数値を代入することを根拠とする解答		⑤	11人 (7.1%)
直線を引かなければいけないという信念を根拠とする解答		⑥	12人 (7.8%)
上記以外		⑦	23人 (14.9%)
無解答		⑧	13人 (8.4%)
計			154人

上記のような解答類型で整理された選択の根拠（表 2）と調査問題 1 の

選択肢との関係を図3に示す。つまり、それぞれの解答類型に分類された生徒がどの選択肢を選ぶ傾向にあるかを提示する。

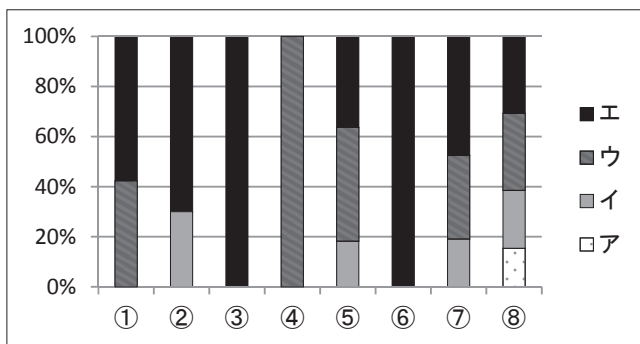


図3：根拠の解答類型と選択肢の関係

図3をみると、非常に特徴的な傾向が見て取れる。それは、表2において解答類型③及び④に分類された生徒の選択の傾向である。上述した通り、表2において解答類型③及び④に分類された生徒は、自身の選択の根拠として点と直線の関係について言及している。点と直線のことを根拠とする生徒の中で解答類型③に該当する生徒は、「点の集合を直線」と認めているのに対して、解答類型④に該当する生徒は「点の集合を直線」と認めない。そのため、図3に示された選択の傾向においても、「点の集合を直線」と認める解答類型③の生徒はすべて選択肢エを選択している。一方、「点の集合を直線」と認めない解答類型④の生徒はすべて選択肢ウを選択している。

このような傾向から、点の集合と線との関係に関する学習内容の理解が正しいグラフの選択に必要なことが分かる。今後、点の集合を線と認められない生徒の思考を分析するためには、実数の連続性が教科書において、いかに取り扱われているのかを明らかにしていく必要があるだろう。

次に、調査問題2の結果を表3に示す。

表3：調査問題2の反応率

正しい	正しくない (正答)	無解答	計
57人 (37.0%)	94人 (61.0%)	3人 (2.0%)	154人

調査問題2の正答率は61.0%であった。それに対して、Aくんの考えを「正しい」とする解答の反応率は37.0%である。このことから、約4割の生徒が式の形式によってグラフの概形が変わってしまうと捉えていることが考えられる。また、その生徒は、二元一次方程式のグラフと一次関数のグラフを関連づけて理解していないことが分かる。

Aくんの考えを「正しい」とする生徒の根拠と、「正しくない」とする生徒の根拠をそれぞれ、表4と表5のように整理した。

表4より、解答類型①に分類される生徒の割合は8.8%である。この類型に分類される生徒は、「点の全体は直線ではなく、あくまでも点である」ということを根拠にして陰関数表記で表された二元一次方程式のグラフが離散的なグラフになるということを説明している。

一方、解答類型②に分類される生徒の割合は36.8%であった。この類型に分類される生徒は「二元一次方程式を y について解いた式のグラフは直線になる」ということを根拠にAくんの考えを「正しい」と認めている。この解答類型に分類された特徴的な生徒の記述として生徒A.Tの記述を取り上げる。生徒A.TはAくんの考えを正しいと認め、その根拠として「二元一次は答えが2つ、または一つなので直線にはならないが、Aさんのように $y=2x-1$ となると直線になると思う。」と述べた。この生徒A.Tの記述からも分かるように、生徒A.Tは二元一次方程式のグラフは直線ではないとし、その式を y について解き、 $y=2x-1$ と表された方程式のグラフは直線であると判断したのである。このことから、生徒A.Tは方程式が陽関数表記の時にはグラフを直線と捉え、陰関数表記の時にはグラフを直線として捉えているのではないかと考えられる。このように調査問題2を実施

することで、Ⅱにおいて記述した研究の仮説に合致する生徒の実態の一端を特定することができたのである。

また、解答類型①と解答類型②に対する反応率を見てみると、それぞれ8.8%と36.8%であり、合わせて45.6%である。このことから、Aくんの考えを「正しい」とする生徒のうち、「点の全体は直線ではなく、あくまで点である」ということを根拠にしている生徒と「二元一次方程式を y について解いた式のグラフは直線になる」ということを根拠としている生徒が多数存在していることが分かる。

また、解答類型③に分類される生徒は、「方程式の中の文字に数値を代入」したことを根拠としている。解答類型④に分類された生徒は、「一次関数の性質」を根拠としAくんの考えを「正しい」と判断している。

表4：「正しい」とする根拠の解答類型

解答類型		反応率
①	点の全体は直線ではなく点であるということを根拠とする解答	5人 (8.8%)
②	二元一次方程式を y について解いた式のグラフは直線になるという解答	21人 (36.8%)
③	方程式の中の文字に数値を代入したことを根拠とする解答	3人 (5.3%)
④	一次関数の性質を根拠とする解答	6人 (10.5%)
⑤	反比例の式が二元一次方程式ならば曲線も存在すると根拠を示す解答	3人 (5.3%)
⑥	分からないという解答	5人 (8.8%)
⑦	上記以外	9人 (15.8%)
⑧	無解答	5人 (8.8%)
計		57人

表5より、解答類型①に分類された生徒の割合は26.6%である。この類型に分類される生徒は「点の集合は直線になる」ということを根拠にして

Aくんの考えを否定している。また、解答類型③に分類される生徒の割合は17.0%であった。この類型に分類される生徒は、式変形を行う前の方程式と後の方程式を同じ方程式と捉え、Aくんの考えを否定している。このように解答類型①と③に分類される生徒はAくんの考えに対して妥当な根拠を示し、その考えを否定しているのである。

一方、解答類型②に分類された生徒の割合は21.3%であった。この解答類型に分類される生徒は、Aくんの考えを「正しくない」とする根拠を示していない。また、解答類型④に分類される生徒の割合は7.4%であった。この解答類型に分類される生徒は、 $y=ax+b$ という式の形式を根拠としている。このようにAくんの考えを「正しくない」と判断する生徒の中にも、その判断に対する妥当な根拠を述べることができない生徒が多数存在した。

表5：「正しくない」とする根拠の解答類型

解答類型		反応率
①	点の集合は直線になることを根拠にする解答	25人 (26.6%)
②	根拠を示さずに二元一次方程式のグラフは直線だからと述べている解答	20人 (21.3%)
③	式変形を行う前後の式を同じ式とみなす解答	16人 (17.0%)
④	$y=ax+b$ という式の形を根拠とする解答	7人 (7.4%)
⑤	方程式の中の文字に数値を代入したことを根拠とする解答	5人 (5.3%)
⑥	一次関数の性質を根拠にする解答	4人 (4.3%)
⑦	わからないという解答	3人 (3.2%)
⑧	上記以外	9人 (9.6%)
⑨	無解答	5人 (5.3%)
計		94人

IV. 調査結果の分析と考察

1. 式変形が選択へ及ぼす影響

IV. 1 では調査問題 1 において選択肢を選択することに対する式変形の影響を分析する。そのため、調査問題 1 における理由の記述において、問題文で与えられた二元一次方程式を y について解いた式が記述されているかどうかを調べる。ここでは、 y について解いた式が記述されている場合に「 $y=ax+b$ に変形」したと捉え、その記述がない場合に「式変形なし」と捉えた。その結果、以下の表 6 のように整理された。

表 6：式変形によるグラフ選択への影響

	$y=ax+b$ に変形	式変形なし	計
ウを選択	9 人	31人	40人
エを選択	55人	41人	96人
上記以外	3 人	15人	18人
計	67人	87人	154人

この表 6 によると、154名のうち式変形を行った生徒は67名、式変形を行わなかった生徒が87名であった。この式変形を行った67名のうち 9 名（13.4%）が選択肢ウを、55名（82%）が選択肢エを選択している。一方、式変形を行っていない87名の生徒のうち31名（35.6%）が選択肢ウを、41 名（47.1%）が選択肢エを選択している。

このことから、式変形を行っている生徒と、式変形を行っていない生徒との間では選択肢ウを選択する生徒の割合に違いが生じていることが分かる。また、二元一次方程式を $y=ax+b$ に式変形するということが、二元一次方程式のグラフを直線として捉えるための一つの契機になっているのと考えられる。

2. 調査問題 1 と調査問題 2 の関連

IV. 2 では、調査問題 1 と調査問題 2 の結果の関連を分析する。そのために、調査問題 1 の結果と調査問題 2 の結果をクロス集計した。

その結果を以下の表 7 に示す。

表 7：調査問題 1 と調査問題 2 のクロス集計

	調査問題 2 の結果				計
		正しい	正しくない	無解答	
調査問題 1 の結果	ア	2 人	2 人	0 人	4 人
	イ	5 人	7 人	0 人	12 人
	ウ	17 人	22 人	1 人	40 人
	エ	33 人	62 人	1 人	96 人
	無解答	0 人	1 人	1 人	2 人
	計	57 人	94 人	3 人	154 人

このようにクロス集計することによって、調査問題 1 において選択肢ウを選択し、調査問題 2 において A くん の 解 答 を 「 正 し い 」 と 整 合 的 に 解 答 する生徒や、調査問題 1 において選択肢ウを選択し、調査問題 2 において A くん の 考 え を 「 正 し く な い 」 と 非 整 合 的 に 解 答 する生徒を特定できる。このクロス集計表によって特定された生徒がどのような解答を記述しているのかを分析することによって、調査問題 1 において選択肢ウを選択する生徒の思考を分析できると筆者は考えた。

(1). 整合的な解答をする生徒の傾向

クロス集計表（表 7）より、調査問題 1 において選択肢ウを選択し、調査問題 2 において A くん の 解 答 を 「 正 し い 」 と 整 合 的 な 解 答 を する生徒は 17 名存在する。この 17 名の生徒の中で特徴的な生徒は、先程取り上げた生徒 A.T である。この生徒 A.T は調査問題 1 において選択肢ウを選択し、調査問題 2 において A くん の 考 え を 「 正 し い 」 と 判 断 し た。その理由として生徒 A.T は、「二元一次は答えが 2 つ、または 1 つなので直線にはならないが、A さんのように $y=2x-1$ となると直線になると思う。」と記述した。このことから、生徒 A.T は二元一次方程式のグラフを直線ではないとし、その式を y について解き、 $y=2x-1$ と表された方程式のグラフは直線であると判断したのである。

生徒R.Sも調査問題1において選択肢ウを選択し、調査問題2においてAくんの考えを「正しい」と解答している。そして、その理由として生徒A.Tと同様の解答をしている。それは「直線のグラフの式は $y=ax+b$ の形だから。だけど、二元一次方程式は」という記述である。この生徒R.Sの記述は途中で終わっており「二元一次方程式は」に続く内容が記述からは読み取ることができない。しかし、生徒R.Sは、「直線のグラフの式は $y=ax+b$ の形だから」と述べた後で、逆説の「だけど」という接続詞を入れ「二元一次方程式は」と続けているのである。このことから、生徒R.Sは「二元一次方程式は $y=ax+b$ の形ではない」と考え、陰関数表記で表された二元一次方程式を「直線ではなく格子点上のみの離散的なグラフ」として捉えていると考えられる。

このように、調査問題1と調査問題2に対して整合的に解答する生徒の中には、二元一次方程式の形式が陽関数表記か、陰関数表記かによって対応するグラフが異なると捉える生徒が存在することが明らかになった。

(2)．非整合的な解答をする生徒の傾向

クロス集計表(表7)より、調査問題1において選択肢ウを選択し、調査問題2においてAくんの解答を「正しくない」と非整合的な解答をする生徒は33名存在する。この33名の生徒の中で特徴的な反応を示す生徒として、生徒H.Kを取り上げる。

生徒H.Kは調査問題1において選択肢ウを選び、調査問題2においてAくんの考えを「正しくない」と判断した。調査問題2において「正しくない」と判断した理由について、生徒H.Kは「点の全体は直線で表せるし、二元一次方程式じゃなくて $y=ax+b$ は一次関数の式だと思う」と述べている。生徒H.Kは、問題文中には「一次関数」と明記していない方程式 $y=ax+b$ を二元一次方程式ではなく一次関数の式と捉えたのである。このように解答する生徒H.Kは、調査問題1において選択肢ウを選んでいいる。調査問題1では二元一次方程式は陰関数表記で与えられていた。生徒H.Kは陰関数表記で与えられた二元一次方程式に対応するグラフを選択肢ウの離散的な

グラフと捉えた一方で、調査問題 2 において陽関数表記で示された式を一次関数と捉え、そのグラフを直線と述べる。このように問題文中に示される方程式の形式が陽関数表記なのか陰関数表記なのかによって選択するグラフに変化が生じる生徒 H.K の解答は非常に興味深い。

生徒 C.K も、生徒 H.K と同様の反応を示している生徒 C.K は、調査問題 1 で選択肢ウを選びながらも、調査問題 2 において「正しくない」と解答している。そして、その理由として、「 $y=2x-1$ が二元一次方程式ならば、この式の解を座標とする点の全体も直線にはならないはず。しかし、 $y=2x-1$ は直線の式なので、正しくないと思う。」と述べた。このように、生徒 C.K は、 $y=2x-1$ が二元一次方程式ならば、そのグラフは直線にはならないと考えている。この根拠から、生徒 C.K は陰関数表記で表された二元一次方程式のグラフが直線ではなく格子点上のみの離散的なグラフであるということを前提にしていると読み取れる。

上述した 2 名の生徒の記述から、選択肢ウを選択する生徒の中に、陰関数表記の方程式を二元一次方程式と捉え、陽関数表記の方程式を一次関数の式を捉える生徒が存在することが明らかになった。また、陰関数表記で与えられた二元一次方程式に対応するグラフを離散的なグラフと捉える生徒の存在から、相等関係を表す方程式として二元一次方程式を捉えることがグラフを直線とみることの阻害要因となるのではないかという仮説が立った。

V. 議論

本研究は質問紙調査を用いた事例研究である。本研究が実施した質問紙調査より、二元一次方程式の形式が陽関数表記か、陰関数表記かによって対応するグラフが異なると捉える生徒の傾向が顕在化した。

本章では、学校数学における文字の意味とその性質について明確にし、本稿で取り上げた生徒の実態と文字の二つの側面との関連を考察する。次に、数学的概念がもつ二面性と文字の二つの側面との関連について考察

し、数学的概念の二面性から、生徒の文字に対する理解の分析の必要性について述べる。

1. 文字の二側面と生徒の実態の関連

学校数学において、文字式の中で用いられる文字の意味には、未知数、定数、変数の3つの意味がある（三輪，1996，p.5）。未知数、定数、変数といった文字の使い分けは、文字を解釈する者や、文字が使われる文脈に依存する（Wagner，1983；国宗，1997）。

加藤（1964）は、上記のように解釈され、文脈に依存して使用される文字の性質を分析している。その分析結果をもとに、文字のもつ二つの側面として不確定性（可変性）と同一性（不変性）を指摘したのである。加藤によれば、数の代わりに文字を用いる場合には、文字の値の不確定性が前提となっており、文字を用いて式を作る場合には文字の値の同一性（不変性）が前提となっている。このような文字の特徴を明らかにしたうえで、加藤（1964）は一見矛盾する二つの側面を学習指導において両立させる必要があると主張している。

加藤（1964）と同様の着眼点から、文字に対する生徒のミスコンセプションの様相を浮き彫りにした研究として、藤井（1992）があげられる。藤井（1992）は文字のもつ規約「同じ文字は同じ数を表す」に焦点をあてて、生徒のミスコンセプションを顕在化し、その解消の難易について論じた。インタビューで顕在化した文字の理解とミスコンセプションの様相を、文字の特定性と不特定性を視点に整理している。藤井（1992）の述べる特定性と不特定性は加藤（1964）による指摘と類似の着眼点である。すなわち、「同じ文字は同じ数を表す」という規約は、変数概念の特定性が「同じ文字」において顕在化したのである。一方、「不特定性」とは文字に対応する数範囲のうち、どの数をとるかということを不問に付している点を強調している。

藤井（1992）によって実施されたインタビューでは、文字の二つの側面との関連から次のようにレベルが設定されている。藤井（1992）によ

れば、レベル1は文字の「不特定性」のみに着眼している状態であり、レベル2は文字の「特定性」のみに着眼している状態である。そして、レベル3は文字の「特定性」と「不特定性」が共存している状態である。

藤井（1992）はこのように3段階のレベルを文字の二つの側面から設定したうえで、ミスコンセプション解消の難易について主張している。その主張とは、レベル1からレベル2への移行は比較的容易であるが、レベル2からレベル3への移行は困難であるというのである。それは、「同じ文字」に対しては「特定性」、「違う文字」に対しては「不特定性」という、一見矛盾する二つの側面を同時に容認しなければならないからである。

本稿で取り上げる生徒の実態は、二元一次方程式のグラフに関連するものであり、「二元一次方程式のグラフを直線ではなく、座標平面上の格子点のみの離散的なグラフと捉える」というものであった。この生徒の実態は、藤井（1992）の述べるレベルの移行うち後者のレベル2からレベル3への移行に位置づく実態であると考えられる。

それは、II.2において述べたように、二元一次方程式 $ax+by=c$ (a, b, c は定数) には次のような二通りの見方が存在するからである。第一の見方は、等式の中の文字 x, y を未知数としてみる立場である。この見方に基づいて等式 $ax+by=c$ (a, b, c は定数) をみると、未知数 x, y に関する相等関係を表す二元一次方程式とみることが可能になる。一方、第二の見方は、等式の中の文字 x, y を変数としてみる立場である。この見方に基づいて等式 $ax+by=c$ (a, b, c は定数) を見て、等式を y について解くことで一次関数としてみる事が可能となる（鎗田, 1961；菊池, 1970；Kieran, 1997）。

これらの見方に基づいて、二元一次方程式のグラフに関する学習が行われる。その学習において生徒は、相等関係を表す方程式から関数関係を表す一次関数の式へと式の見方を変更する必要がある（榎本, 2015）。このように、二元一次方程式のグラフに関する学習においては、文字を未知数から変数へ見直す必要がある。これを加藤（1964）及び藤井（1992）の

文字の二側面から特徴づけると、文字の特定性から不特定性へ解釈者の焦点を変更しなければならない。これらのことから、本稿で取り上げる生徒の実態が、藤井（1992）におけるレベルの移行のうち、レベル2からレベル3への移行に位置づくものと考えられる。そして、本稿で取り上げる生徒の実態を、式の中の文字の見方に関する生徒の困難性としてみることも可能となる。

また、藤井（1992）が文字の規約から生徒のミスコンセプションを同定したように、本稿において取り上げた生徒の実態と関連する文字の規約を特定しなければならない。それは、「二元一次方程式のグラフを直線ではなく、座標平面上の格子点のみの離散的なグラフと捉える」生徒の実態に関連する文字の規約を特定できれば、その規約を視点とした調査を設計することが可能となり、本稿で取り上げる生徒の実態をさらに精密に分析することが可能となるからである。

2. 数学的概念の二面性と文字の二側面の関連

Sfard（1991）は、様々な数学的定義や数学的表現の分析により、数や関数といった抽象的な数学的概念が基本的に異なった二つの方法で捉えられることを主張した。すなわち、その方法とは数学的概念をオブジェクトとして構造的に捉える方法と、プロセスとして操作的に捉える方法である。これら二つの捉え方は一見、両立しないように思われるが、実際には相補的である。この点を、Sfard（1991）は数学的概念の二面性と特徴づけ、数学的概念形成を操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行として主張した。

上記のような数学的概念の二面性と概念形成理論に基づいて、SfardとLinchevski（1994）は代数的思考の本性とその発達について分析をしている。その中で、Sfard と Linchevski（1994）は、「文字式それ自体は意味を内包するものではなく、学習者によってはじめてその意味づけがなされるもの」であるとした。そして、その意味づけにおいて数学的概念の二面性が関与するとし、文字式における二面性を特徴づけた。それは、文字式

を計算過程として捉えれば操作的であり、数や関数、関数族として捉えれば構造的であるというものである。このように文字式は、それ自身をいかに見るのかによって、その式に付与する意味が異なるのである。これは、加藤（1964）やWagner（1983）、国宗（1997）と同様の指摘である。

Sfardら（1994）は、数学的概念の二面性に基づいた概念形成理論であるreification理論を用いて、代数史の分析を行った。その分析結果から、「一般化された算術としての代数」が概念化され、操作的コンセプションと構造的コンセプションの分析対象となった。Sfardらによる代数史の分析結果は、表8のように整理された。

Sfardらの分析から、代数はその歴史上、二つの焦点の移行を有しているということが明らかになった。一つ目の焦点の移行は「数値の計算」から「定数値代数」、すなわち「方程式」への移行である。一方、二つ目の焦点の移行は、「定数値代数」から「関数的代数」への移行である。第一の移行では未知数としての文字の導入により、文字式が計算の過程だけではなく、その結果（プロダクト）も同時に表すことになる。対して、第二の移行では、方程式の表す数量関係の見方が「相等関係」から「関数関係」へと変更され、それに伴い方程式の中の文字の見方も「未知数」から「変数」へと変更される。

表8：代数の発展の段階（Sfard & Linchevski, 1994, p.203）

	段階	焦点	表現
一般化された算術としての代数	1.1. 操作的	1.1.1. 数値の計算	言語的表現
			言語的表現と記号的表現
	1.2. 構造的	1.2.1. 計算のプロダクト (定数値代数)	記号的表現 (未知数としての文字)
		1.2.2. 関数 (関数的代数)	記号的表現 (変数としての文字)

これら代数史上の移行に対応するように学校数学の学習上においても質的な飛躍が潜んでいるとSfardら（1994）は述べ、その飛躍において子どもが困難を生起する可能性があるという理論的仮説を立てた。

Sfardら（1994）の述べる代数史上の移行のうち、後者の移行は「方程式」から「関数」への移行であった。この移行における式の見方の変更には、文字の見方の変更も伴う。文字を未知数から変数へと見直す際には、加藤（1964）及び藤井（1992）の述べる文字の特定性と不特定性が関連する。藤井（1992）によって文字の規約から生徒のミスコンセプションが同定されている。V.1において述べたように藤井（1992）によって同定された文字の規約と生徒の実態との関連を考察するとともに、数学的概念の二面性を視点として文字の規約と生徒の実態の関係を整理する必要がある。これら三者の関係が整理できれば、本稿で取り上げた生徒の実態をさらに精密に分析することが可能となる。

VI. まとめと今後の課題

本稿の目的は、二元一次方程式のグラフを直線ではなく、座標平面の格子点上のみの離散的なグラフと捉える生徒の思考の様相を明らかにすることであった。この目的を達成するために、本稿では二元一次方程式と一次関数の関係を概念的に分析し、その分析から研究仮説を立てた。そして、その仮説を踏まえて、本研究では全国学力・学習状況調査の追調査を設計し、実施した。

その結果、本研究の仮説に合った生徒が存在することが分かった。詳述すると、二元一次方程式のグラフを直線ではなく離散的なグラフとして捉える生徒の中に、式の形式（陽関数表記か陰関数表記）によって表されるグラフの概形に相違があると捉える生徒が存在したのである。このように思考する生徒は、式の形式によって二元一次方程式と一次関数を区別している可能性がある。このような思考をする生徒以外にも「点の集合」を「線」と認めない生徒も存在した。

本稿で用いた調査方法は質問紙調査であった。そのため、上述した調査結果から読み取ることのできた生徒の思考の傾向は、一つの事例に過ぎない。今後は、議論において述べたように文字の二つの側面（特定性・不特定性）及び、数学的概念の二面性（Sfard, 1991）を枠組みとして、本稿で取り上げた生徒の実態をさらに精密に解明する必要があるだろう。

謝辞

本研究は科学研究費補助金（課題番号17K14031）の助成を受けて行われました。

参考・引用文献

- 榎本哲士：中学校数学科における文字式の理解に関する一考察：方程式とその解の意味に焦点を当てて．日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集，567－572，宮崎：宮崎大学，2010.
- 榎本哲士：中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析，日本教材学会誌 教材学研究，26，49－56，2015.
- 藤井齊亮：児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査．日本数学教育学会誌 数学教育学論究，58，3－27，1992.
- 岩田耕司：出題の趣旨にみる全国学力・学習状況調査の出題の意図と今後の課題，日本数学教育学会誌 数学教育，94(9), 34－37，2012.
- 加藤國雄：数学の問題解決における思考：代数的思考について．山梨大学学芸学部研究紀要，16，199－204，1964.
- 菊池兵一：数学的な考え方を伸ばす指導，埼玉：北辰図書，1970.
- 国宗進：確かな理解をめざした文字式の学習指導，東京：明治図書，1997.
- Kieran, C. : Mathematical Concept at the Secondary School Level : The Learning of Algebra and Functions, In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching Mathematics: an international perspective*, 707－762, UK: Psychology Press, 1997.
- 三輪辰郎：文字式の指導序説．筑波数学教育研究，15, 1－14, 1996.
- 文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編，東京：教育出版
- 文部科学省・国立教育政策研究所：平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要，2008.
- 文部科学省・国立教育政策研究所：平成21年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要，2009.
- 能田伸彦：方程式と図形の関数的な見方．阿部浩一ら(編)，『新・中学校数学指導講座 第4巻 関数』(pp.71－89)，東京：金子書房，1978.
- 清水美憲：分数の除法に関する児童・生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題，日

- 本数学教育学会誌 数学教育学論究, 63・64, 3 - 26, 1995.
- 清水美憲：評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化：全国学力・学習状況調査（中学校数学）の動向と課題, 日本数学教育学会誌 数学教育, 94 (9), 30 - 33, 2012.
- 清水宏幸：中学校数学科における文字式の理解に関する研究. 山梨大学修士論文, 1998.
- 鎗田宏一：方程式と関数との関係およびその指導. 戸田清・和田義信（編）, 『中学校数学指導実例講座 第4巻 関数関係の指導』（pp.108 - 116）, 東京：金子書房, 1961.
- Sfard, A. : On the Dual Nature of Mathematical Conception : Reflection on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1 - 36, 1991.
- Sfard, A., & Linchevski, L. : The Gain and the Pitfalls of Reification : The Case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228, 1994.
- Wagner, S. : What Are These Things Called Variables?, *Mathematics Teacher*, 474 - 479, 1983.